MATEMÁTICAS

ÁREA: BÁSICA CLAVE DE LA ASIGNATURA: LA 102

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA:

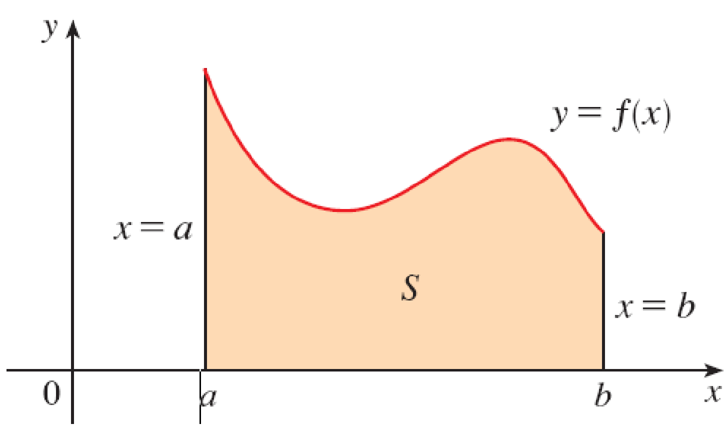
Al término del curso, el alumno analizará los principios de las matemáticas; aplicará los mismos como herramientas para operar en los comportamientos estadísticos, económicos y en particular los administrativos, dentro de las organizaciones.

5. Integrales

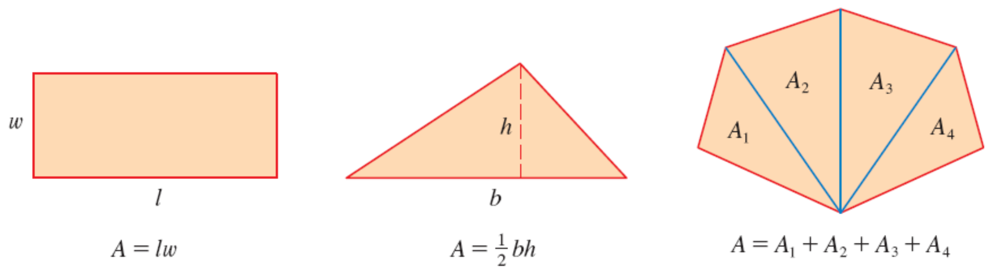
Los problemas del área y de la distancia se utilizan para formular la idea de integral definida, la cual representa el concepto básico del cálculo integral una vez se usa para resolver problemas referentes a volúmenes, longitudes de curvas, predicciones sobre población, gasto cardiaco, fuerzas sobre la cortina de una presa, trabajo, superávit del consumido y béisbol, entre muchos otros.

El problema del área

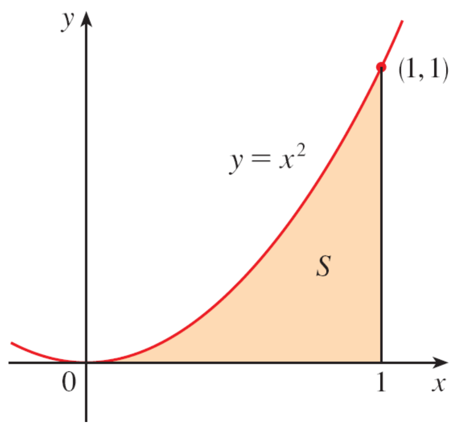
Hallar el área de la región S que está debajo de la curva $y=f(x)$, desde a hasta b. Esto significa que S está limitada por la gráfica de una función continua f, las rectas verticales $x=a$ y $x=b$, y el eje x.



Al intentar resolver el problema, debe preguntarse; ¿Cuál es el significado de la palabra área? Esta cuestión es fácil de responder para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, se define como el producto del largo y el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base multiplicada por la altura. El área de un polígono se encuentra al dividirlo en triángulos y sumar las áreas de esos triángulos.



Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región con lados curvos. Todos tienen una idea intuitiva de lo que es el área de una región. Pero parte del problema del área es hacer que esta idea sea precisa dando una definición exacta de área.



Recuerde que al definir una tangente, primero se obtuvo una aproximación de la pendiente de la recta tangente por las pendientes de rectas secantes y, a continuación tomó el límite de estas aproximaciones. Siga una idea similar para las áreas. En primer lugar obtenga una aproximación de la región S por medio de rectángulos y después tome el límite de las áreas de estos rectángulos, como el incremento del número de rectángulos.

De esa forma podemos dar la siguiente definición.

El **área** A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua *f* es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

El problema de la distancia

Considere ahora el problema de la distancia: hallar la distancia recorrida por un objeto durante cierto periodo, si se conoce la velocidad del objeto en todos los momentos. Si la velocidad permanece constante, entonces el problema de la distancia es fácil de resolver por medio de la fórmula:

Distancia = Velocidad x Tiempo

Pero si la velocidad varía, no es fácil hallar la distancia recorrida. Investigue el problema en el ejemplo siguiente.

Ejemplo: Suponga que el odómetro del automóvil está averiado y que desea estimar la distancia que ha recorrido en 30 segundos. Las lecturas del velocímetro cada cinco segundos están registradas en la tabla siguiente:

Tiempo (s) 30	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (mi/h)	17	21	24	29	32	31	28

Para tener el tiempo y la velocidad en unidades coherentes, convierta las lecturas de velocidad a pies por segundo (1 mi/h = 5280/3600 pies/s):

Tiempo (s) 30	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (mi/h)	25	31	35	43	47	46	41

Durante los primeros cinco segundos, la velocidad no cambia mucho, de modo que puede estimar la distancia recorrida durante ese tiempo al suponer que la velocidad es constante. Si la considera igual a la velocidad inicial (25 pies/s), por lo tanto obtiene la distancia aproximada recorrida durante los primeros cinco segundos:

(25 pies/s)(5s)=125 pies

De manera análoga, durante el segundo intervalo, la velocidad es aproximadamente constante y se toma como la velocidad correspondiente a t = 5 s. De modo que la estimación para la distancia recorrida desde t =5 s hasta t =10 s es

(31 pies/s)(5s)=155 pies

Si suma las estimaciones semejantes para los otros intervalos de tiempo, obtiene una estimación para la distancia total recorrida:

(25 *5) +(31*5)+(35*5)+(43*5)+(47*5)+(46*5)= 1135 pies

Con igual propiedad podría haber usado la velocidad correspondiente al final de cada periodo, en lugar de la velocidad al principio de los mismos, como la supuesta velocidad constante. En tal caso las estimaciones quedarían

(31*5)+(35*5)+(43*5)+(47*5)+(46*5)+(41*5)= 1215 pies

Si buscara una estimación más exacta, habría tomado las lecturas de la velocidad cada dos segundos o cada segundo.

En general, suponga que un objeto se mueve con velocidad $v=f(t)$, de modo que el objeto siempre se mueve en la dirección positiva. Tome las lecturas de la velocidad en los instantes t_0 (=a), t_1, t_2,…, t_n (=b), de forma que la velocidad sea aproximadamente constante en cada subintervalo. Si estos instantes están igualmente espaciados, entonces el tiempo entre lecturas consecutivas es $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Durante el primer intervalo, la velocidad es más o menos $f(t_0)$ y, por consiguiente, la distancia recorrida es alrededor de $f(t_0)\Delta t$. De manera análoga, la distancia recorrida durante el segundo intervalo es alrededor de $f(t_1)\Delta t$ y la distancia total recorrida durante el intervalo [a, b] es poco más o menos

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

Si usa la velocidad en los puntos extremos de la derecha, en lugar de los puntos extremos de la izquierda, su estimación para la distancia total se convierte en

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Entre mayor sea la frecuencia con que se mide la velocidad, más exactas se vuelven las estimaciones, de modo que parece plausible que la distancia exacta d recorrida sea el límite de esas expresiones:

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

5.1 Integral definida

En los problemas del área y distancia surgió el límite de la forma:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

Resulta que este tipo de límite se presenta en una amplia variedad de situaciones, incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. También surgen límites similares al hallar longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, centros de masa, la fuerza debida a la presión del agua y el trabajo, así como otras cantidades. De modo que tienen un nombre y una notación especiales.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Haga que $x_0 (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ como los **puntos muestras** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, desde a hasta b**, es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$.

Nota: Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama **signo de integral**. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la notación $\int f(x)dx$, $f(x)$ se llama **integrando**, y a y b se conocen como los **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. El símbolo dx no tiene significado en sí; la expresión, vista como un todo, es un símbolo único. La dx indica simplemente que la variable independiente es x. El procedimiento para calcular una integral se llama **integración.**

El teorema que sigue muestra que la mayor parte de las funciones que usualmente acontecen en realidad son integrables. Esto se comprueba en cursos más avanzados.

TEOREMA Si f es continua en $[a, b]$, o si f tiene únicamente un número finito de saltos discontinuos, entonces f es integrable en $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Si f es integrable en [a, b], entonces el límite en la definición existe y proporciona el mismo valor, no importa cómo seleccione el punto muestra x_i^*. Para simplificar los cálculos de la integral con frecuencia tomamos los puntos muestra los extremos de la derecha. Por lo tanto $x_i^* = x_i$ y la definición de una integral se simplifica como sigue.

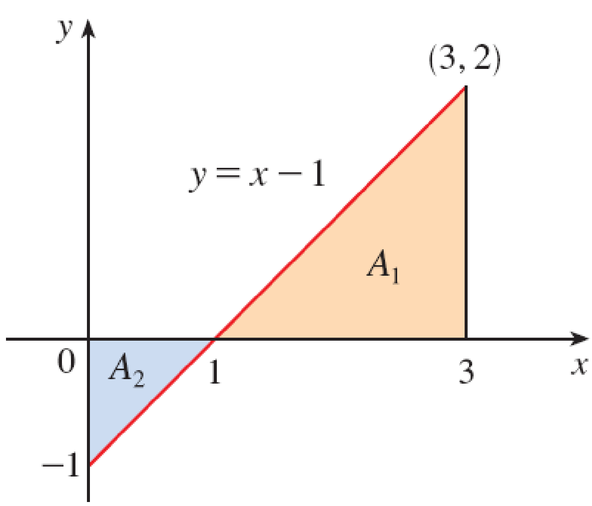
TEOREMA Si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

donde $\quad \Delta x = \dfrac{b-a}{n} \quad$ y $\quad x_i = a + i\,\Delta x$

Ejemplo. Evalúe la integral siguiente interpretándola en términos de área.

$$\int_0^3 (x-1)dx$$



La gráfica de y=x-1 es la recta con pendiente 1 que se muestra en la figura de la izquierda, calcularemos la integral cómo la suma de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x-1)dx = A_1 - A_2 = \frac{1}{2}(2*2) - \frac{1}{2}(1*1) = 1.5$$

La regla del punto medio

A menudo se elige el punto muestra x_i^* como el extremo de la derecha del i-ésimo intervalo como el punto muestra porque resulta conveniente para calcular el límite. Pero si la finalidad es hallar una aproximación para una integral, conviene elegir x_i^* como el punto medio del intervalo, el cual se denota por $\bar{x}_i$. Cualquier suma de Riemann es una aproximación a una integral, pero si usa los puntos medios, obtiene la aproximación siguiente:

REGLA DEL PUNTO MEDIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

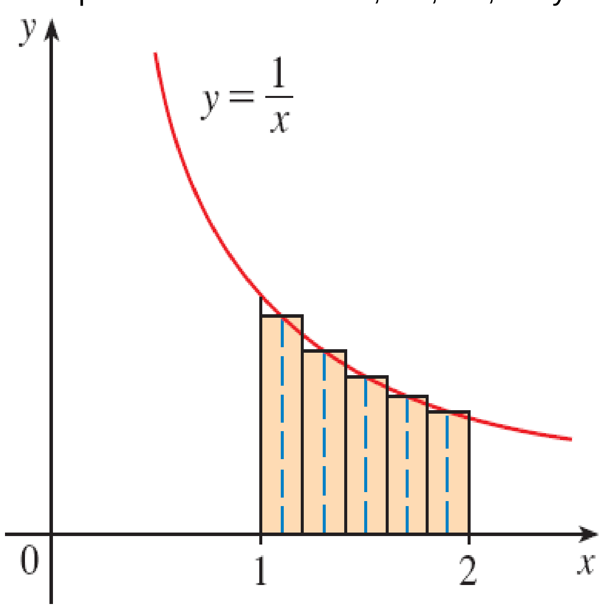
donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

y $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$

Ejemplo. Use la regla del punto medio con n = 5 para hallar una aproximación de

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

Los puntos extremos de los cinco subintervalos son 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2.0. De modo que los puntos medios son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9. El ancho de los subintervalos es



$\Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$, de suerte que la regla del punto da:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + (1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right) =\approx 0.691908$$

Puesto que $f(x) = \frac{1}{x} > 0$, para $1 \le x \le 2$, la integral representa un área y la aproximación dada por la regla del punto medio es la suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura.

Propiedades de la integral definida

Cuando se definió la integral definida $\int_b^a f(x)\,dx$, de manera implícita se hizo la suposición de que $a < b$. Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aun cuando $a > b$. Advierta que si invierte a y b, en tal caso Δx cambia de $\frac{b-a}{n}$ a $\frac{a-b}{n}$. En consecuencia

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

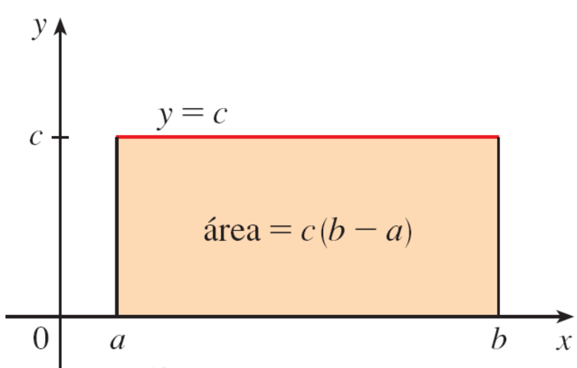
Si a=b, luego $\Delta x = 0$ y así

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

Ahora aparecen algunas propiedades básicas de las integrales que le ayudarán a evaluarlas con mayor facilidad. Suponga que f y g son funciones continuas.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, donde c es cualquier constante
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante
4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$



$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

En la propiedad 1 se expresa que la integral de una función constante f(x)=c es la constante multiplicada por la longitud del intervalo. Si c> 0 y a < b, esto es de esperarse porque c(b – a) es el área del rectángulo como lo muestra la siguiente figura.

En la propiedad 2 se afirma que la integral de una suma es la suma de las integrales. Para funciones positivas, esto quiere decir que el área debajo de $f + g$ es el área debajo de f más el área debajo de g.

La propiedad 3 se puede probar de manera semejante y en ella se expresa que la integral de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la integral de la función. En otras palabras, una constante (pero sólo una constante) se puede llevar hacia afuera de un signo de integral.

En la propiedad que sigue se dice cómo combinar las integrales de la misma función sobre intervalos adyacentes:

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Advierta que las propiedades 1 a 5 son verdaderas ya sea que $a < b$, $a = b$ o $a > b$.

Las propiedades que se enuncian a continuación, en las que se comparan tamaños de funciones y tamaños de integrales, son verdaderas sólo si $a \leq b$.

PROPIEDADES DE COMPARACIÓN DE LA INTEGRAL

6. Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

7. Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

La interpretación geométrica de la propiedad 6 es simplemente que las áreas son positivas. La propiedad 7 expresa que una función más grande tiene una integral más grande. La propiedad 8 expresa que el área debajo de la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que el área del rectángulo con altura M.

5.2 Integral indefinida

Teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El primero surgió del problema de la tangente, el cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que estos dos problemas en realidad estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo da la correspondencia inversa inequívoca entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta correspondencia y la aplicaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático. En particular, ellos advirtieron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas.

La primera parte del teorema fundamental trata funciones definidas por una ecuación de la forma $g(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Donde *f* es una función continua sobre [a, b] y x varía entre a y b.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE I. Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

Ejemplo. Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}dt$.

Puesto que $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ es continua, por el teorema fundamental del cálculo tenemos $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$.

La segunda parte del teorema fundamental del cálculo, la cual se infiere con facilidad de la primera parte, representa un método mucho más simple para evaluar integrales.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$.

La parte 2 del teorema fundamental establece que si conoce una antiderivada F de f, entonces puede evaluar $\int_a^b f(x)dx$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los extremos del intervalo [a, b]. Sorprende mucho que $\int_a^b f(x)dx$, que fue definida mediante un procedimiento complicado que requiere todos los valores de $f(x)$, para $a \leq x \leq b$, se pueda determinar conociendo los valores de F(x) en sólo dos puntos, a y b.

Ejemplos.

1) Evalúe la integral $\int_1^3 e^x dx$.

La función $f(x) = e^x$ es continua en todas sus partes y se sabe que una antiderivada es $F(x) = e^x$, de modo que de la parte 2 del teorema fundamental se obtiene:

$$\int_1^3 e^x dx = F(3) - F(1) = e^3 - e^1 = e^3 - e$$

Observe que el teorema establece que se puede utilizar cualquier antiderivada F de f. De este modo podría usar la más sencilla, a saber $F(x) = e^x$, en lugar de $F(x) = e^x + 7$ o $F(x) = e^x + C$.

2) Determina el área bajo la curva de la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta 1.

Una antiderivada de $f(x)=x^2$ es F(x)=1/3 x^3. El área requerida A se calcula aplicando el teorema fundamental parte 2.

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Una vez estudiados por separadas las partes del teorema se pueden juntar y se enuncia de la siguiente manera:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Suponga que f es continua sobre $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$

La integral indefinida

Ya vio en la sección que mediante la segunda parte del teorema fundamental del cálculo se obtiene un método muy eficaz para evaluar la integral definida de una función, si supone que puede encontrar una antiderivada de la función. En esta sección se presenta una notación para la antiderivada, se repasan las fórmulas de las antiderivadas y se usan para evaluar integrales definidas. Asimismo, replantea el Teorema Fundamental del Cálculo 2, de una manera que facilita más aplicarlo a problemas relacionados con las ciencias y la ingeniería.

Debido a la relación dada por el teorema fundamental entre las antiderivadas y las integrales, por tradición se usa la notación $\int f(x)dx$ para una antiderivada de f y se llama **integral indefinida**. Por esto,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)}$$

Por ejemplo se puede escribir

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad porque \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

De este modo, considere una integral indefinida como la representante de una familia entera de funciones, (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

La eficacia del teorema fundamental depende de que se cuente con un suministro de antiderivadas de funciones. Por lo tanto, se presenta de nuevo la tabla de fórmulas de antiderivación, más otras cuantas, en la notación de las integrales indefinidas.
Cualquiera de las fórmulas se puede comprobar al derivar la función del lado derecho y obtener el integrando. Por ejemplo,

$$\int sec^2 x\,dx = \tan x + C \quad porque \quad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = sec^2 x$$

TABLA DE INTEGRALES INDEFINIDAS

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

La antiderivada más general en un intervalo dado se obtiene por la adición de una constante a una antiderivada particular. Adopte la convención de que cuando se proporciona una fórmula para una integral indefinida general es válida sólo en un intervalo. Así, escriba

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

Con el entendimiento de que válida en el intervalo $(0,\ \infty)$ o en el intervalo $(-\infty, 0)$. Esto se cumple a pesar del hecho de que la antiderivada general de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$, es

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}+C_1 \;\; si\; x<0\\ \frac{1}{x}+C_2 \;\; si\; x>0\end{cases}$$

Ejemplo.

1) Encuentre la integral indefinida general de $\int(10x^4-2sec^2x)dx$.

De acuerdo a la tabla tenemos que

$$\int(10x^4-2sec^2x)dx=10\int x^4dx-2\int sec^2x\,dx$$

$$=10\frac{x^5}{5}-2\tan x+C=2x^5-2\tan x+C$$

2) Evalúe $\int\frac{\cos\theta}{sen^2\theta}d\theta$

Esta integral indefinida no es evidente de inmediato en la tabla, por lo que se aplican las identidades trigonométricas para reescribir la función antes de integrar:

$$\int\frac{\cos\theta}{sen^2\theta}d\theta=\int\left(\frac{1}{sen\theta}\right)\left(\frac{cos\theta}{sen\theta}\right)d\theta=\int csc\theta\,cot\theta\,d\theta=-csc\theta+C$$

Teorema del cambio total

La parte 2 del teorema fundamental establece que si f es continua en [a, b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Donde F es cualquier antiderivada de f. Esto significa que $F'=f$, de forma que se puede volver a escribir la ecuación como

$$\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$$

De manera que puede volver a plantear verbalmente Teorema Fundamental del Cálculo 2 en los términos siguientes:

TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL La integral de una relación de cambio es el cambio total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Referencias

Descubrimiento del cálculo. Recuperado el 29/05/2014 de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo.pdf

Pérez, F. (2008).
VARIABLE. Universidad de Granada, Granada, España.

Stewart, J. (2001). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Thomson Editores, S. A. de C. V. Bogotá, Colombia.

Posada, J (2008). Cálculo guía didáctica y módulo. Facultad de Ciencias Administrativas, Económicas Y Contables. Colombia. Recuperado de**:** http://www.funlam.edu.co/administracion.modulo/NIVEL-02/Calculo.pdf